Khôlles de Mathématiques - MPSI 3

Semaine 29 - Séries numériques

Damien DESFONTAINES - `damien.desfontaines@ens.fr`

Cours 1 : Série de Riemann : CNS de convergence, démonstration.

Cours 2 : Sommations des relations de comparaison.

Cours 3 : Critère spécial des séries alternées.

Exercice 1 (moyen) : Soit $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ bijective. Étudier la convergence de $\sum \frac{u(n)}{n^2}$, puis de $\sum \frac{u(n)}{n^\alpha}$ pour $\alpha \geq 3$.

(Démo : La première diverge tout le temps : pour tout on peut minorer $\sum_{n=N+1}^{3N} \frac{u(n)}{n^2}$ par $\sum_{n=N+1}^{3N} \frac{u(n)}{(3N)^2}$, et parmi les $\{u(n) \mid n \in [N+1, 3N]\}$, N sont nécessairement plus grands que N, donc on minore ça par $\frac{1}{9}$. Le critère de Cauchy n'est pas vérifié, ça diverge. Pour la suite, ça dépend des cas. Si $u_n = \mathrm{Id}$, ça converge, mais on peut créer un contre-exemple qui diverge : $\sigma(2k) = (2k)^\alpha$ (si α est entier, sinon on bidouille), et $\sigma(2k+1)$ =ce qu'il faut pour combler les trous.)

Exercice 2 (plutôt facile) : Soit $\sum u_n$ une série à termes strictements positifs, convergente, de somme S. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \sum_{n+1}^{+\infty} u_k$. Montrer que pour tout $x \in [0, S]$, il existe $K \subseteq \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n \in K} u_n = x$.

(Démo : On dépasse $\frac{x}{2}$, puis $\frac{3x}{4}$, etc.)

Exercice 3 (moyen - X) : Quelle est la nature de la suite $\sum \frac{1}{p_n}$, où p_n est le n-ième nombre naturel s'écrivant en écriture décimale sans utiliser le chiffre 9 ?

Exercice 4 (pas très facile) : Trouver le nombre d'arbres binaires à n feuilles.

(Démo : Wiki.)

Exercice 5 (assez difficile - X) : Soit $\sum u_n$ une série semi-convergente. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $\sum_{i=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} = x$.

(Démo : page 217)

Exercice 6 (intéressant - X) : Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des séries convergentes à termes réels. Existe-t-il une série divergente (b_n) à termes non nuls tels que :

$$\inf_{(a_n) \in \mathcal{C}} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| 1 - \frac{a_n}{b_n} \right| \right) = 0 \quad ?$$

(Démo : page 180)

Exercice 7 (plutôt facile - X) : Trouver les fonctions $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$

Exercice 8 (difficile - ENS) : Soit $P(n) = \max\{p \in \mathbb{P} \mid p|n\}$. Quelle est la nature de $\sum \frac{1}{nP(n)}$?