Khôlles de Mathématiques - MPSI 3

Semaine 25 : Topologie

Damien DESFONTAINES - `damien.desfontaines@ens.fr`

Cours 1 : Définitions de la norme d'une application linéaire, équivalence entre celles-ci.

Cours 2 : Ouvert, fermé : définition, caractérisation.

Cours 3 : Adhérence, intérieur : définition, caractérisation.

Exercice 1 (astucieux, mais à connaître) : Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 2 (piégeux) : Soient A et B deux compacts d'un espace vectoriel normé. Montrer qu'il existe $(a,b) \in A \times B$ tels que $\|a-b\| = \inf\{\|x-y\| \mid (x,y) \in A \times B\}$. Est-ce toujours vrai si A est seulement fermé ? Si A et B sont tous les deux seulement fermés ?

(Démo : on fait des suites qui tendent vers l'inf, et on extrait des sous-suites en faisant bien gaffe à prendre l'une en fonction de l'autre, sinon ça marche pas. Si A est seulement fermé, on se ramène à la première question en prenant $A' = A \cap \{x \in E \mid d(x,B) \leq d(A,B) + 42\}$, borné. Dans le dernier cas, c'est juste faux : prendre $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ et $\{(1,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ pour s'en convaincre.)

Exercice 3 (assez facile) : Supposons qu'une suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice A, que $\forall n \in \mathbb{N}$, A_n soit inversible, et que $\left(A_n^{-1}\right)$ converge vers une matrice B. A est-elle inversible, et si oui, quel est son inverse ? Cela reste-t-il vrai si $\left(A_n^{-1}\right)$ ne converge pas ?

Exercice 4 (X - amusant) : Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Montrer si l'image de tout ouvert par u est un ouvert, alors u est surjective (en fait, c'est une équivalence, mais c'est chaud).

(Démo : Sens $\Leftarrow$, $u(B(0,1))$ est ouvert, pouf. Pour la réciproque, $u(B(0,1))$ est convexe, borné, symétrique par rapport à 0, la réunion de ses homothétiques vaut $\mathbb{R}^m$, donc la jauge associée est une norme, équivalente à l'une des normes usuelles, donc $u(B(0,1))$ contient une boule de centre 0, et par homothétie et translation, tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ a une image ouverte dans $\mathbb{R}^m$.)

Exercice 5 (Centrale - difficile) : Soit $E = \mathbb{C}^n$. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $\rho(f) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(f)\}$. Soit ν une norme sur $\mathcal{L}(E)$. Montrer que $\rho(f) \leq \lim_{p\to\infty}\left(\nu(f^p)^{\frac{1}{p}}\right)$; on pourra commencer par supposer que ν est la norme subordonnée à une norme de E. Montrer que si la matrice est diagonalisable, c'est une égalité.

(Démo : Si ν est subordonnée à $\|.\|$, on a $|\lambda| \leq \nu(f^p)^{\frac{1}{p}}$ pour toute valeur propre λ, et tout $p \in \mathbb{N}^*$: il suffit de montrer que le terme de droite converge. Si on l'appelle x_p et qu'on note $l = \min\{x_p \mid p \in \mathbb{N}^*\}$, $\epsilon > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_p \leq l + \epsilon$, on obtient, si $n - 1 = pq + r$ est la division euclidienne de $n-1$ par p, $\nu(f^n) = \nu\left((f^p)^q \circ f^{r+1}\right) \leq \nu(f^p)^q\, \nu\left(f^{r+1}\right)$, donc $l \leq x_n \leq x_p^{pq/n} x_{r+1}^{(r+1)/n} \leq (l+\epsilon)^{pq/n} \max(x_1, ..., x_{r+1})^{(r+1)/n}$, et ce majorant tend vers $l + \epsilon$, ce qui prouve la convergence qu'on voulait. Si c'est pas le cas, on encadre par équivalence des normes, et pouf. Pour la deuxième question, il suffit de diagonaliser.)

Exercice 6 (superfacile) : Soit $\mathcal{O}$ un ouvert d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathcal{O}) = E$.

Exercice 7 (plutôt facile) : Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie, et $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1)\}$. Trouver l'adhérence et l'intérieur de F.

Exercice 8 (ENS - difficile) : Soit E un espace préhilbertien réel, et $(e_1, ..., e_n) \in E^n$. On note $F = \{-1, 1\}^{[[1,n]]}$. Calculer $\sum_{\sigma \in F} \left\| \sum_{i=1}^{n} \sigma(i)\, e_i \right\|^2$. Montrer que si $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, la norme $\|.\|_\infty$ n'est équivalente à aucune norme euclidienne, et montrer qu'il en va de même pour les normes $\|.\|_p$, pour $p \in [1, +\infty[\setminus \{2\}$.

(Démo : Pour la première question, une récurrence donne $2^n \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2$. Pour la suivante, on prend n fonctions "en pic" vérifiant que quand l'une est non nulle, les autres sont nulles, et qui ont la même norme infinie (par exemple, 1). On applique la question 1, on encadre par la norme infinie par l'absurde et on trouve un bug. La dernière, c'est la même chose.)

Exercice 9 (superfun) : Soit X une partie d'un espace vectoriel normé. Montrer que l'ensemble $\left\{ X, \mathring{X}, \overline{X}, \overline{\mathring{X}}, \mathring{\overline{X}}, \overline{\mathring{\overline{X}}}, \mathring{\overline{\mathring{X}}}, ... \right\}$ est fini. Bonus : calculer son nombre maximal d'éléments.

(Démo, version courte : $\overline{\mathring{\overline{\mathring{X}}}} = \overline{\mathring{X}}$, en effet si U est ouvert, $U \subset \overline{U}$, on rajoute un rond et une barre, et pouf $\overline{U} \subset \overline{\mathring{\overline{U}}}$; et si F est fermé, $\mathring{F} \subset F$ donc $\overline{\mathring{F}} \subset F$. Ça suffit pour montrer que c'est fini. Le nombre maximal d'éléments est 7 : en effet, $\mathring{\overline{\mathring{\overline{X}}}} = \mathring{\overline{X}}$, car si F est fermé, $\mathring{F} \subset F$, on rajoute une barre et un rond, et pouf $\mathring{\overline{\mathring{F}}} \subset \mathring{F}$; et U est ouvert, $U \subset \overline{U}$, donc $U \subset \mathring{\overline{U}}$. Un ensemble qui réalise ce maximum, c'est par exemple $(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \cup [1, 2[\cup]2, 3] \cup \{4\}$ (ne pas se moquer, c'est difficile de faire plus simple).)

Exercice 10 (assez difficile, mais indispensable) : Théorème de Borel-Lebesgue. Soit X une partie compacte d'un espace vectoriel normé E. Montrer que pour tout $r > 0$, il existe une suite finie $(x_1, ..., x_p)$ de X telle que $X \subset \bigcup_{k=1}^{p} B(x_k, r)$. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X. Montrer qu'il existe un réel $r' > 0$ (appelé "nombre de Lebesgue" du recouvrement), tel que $\forall x \in X,\ \exists i(x) \in I,\ B(x, r') \subset U_{i(x)}$. En déduire le théorème de Borel-Lebesgue.

(Démo : Pour le 1, on fait une suite par l'absurde et pouf. Pour le 2, on fait une suite par l'absurde et repouf. Pour le 3, on prend le nombre de Lebesgue du recouvrement d'après 2, il existe un p-uplet (x_i) qui marche bien d'après 1, ils sont tous inclus dans les $U_{i(x_i)}$ et encore pouf. Dans l'autre sens, on prend un recouvrement par des boules ouvertes, on en extrait un recouvrement fini et pouffinal.)