Khôlles de Mathématiques - MPSI 3

Semaine 24 : Espaces euclidiens

Damien DESFONTAINES - damien.desfontaines@ens.fr

Cours 1 : Inégalité de Cauchy-Schwartz, inégalité triangulaire : énoncé, démonstration.

Cours 2 : Définition et caractérisations d'une application orthogonale f ($\|f(x)\| = \|x\|$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$, l'image d'une BON est une BON).

Cours 3 : Théorème spectral : énoncé, démonstration.

Cours 4 : Adjoint d'un endomorphisme : définition, caractérisation matricielle d'un endomorphisme autoadjoint.

Exercice 1 (superfacile) : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tA = A$ et $A^2 = 0$. Montrer que $A = 0$.

(Théorème spectral)

Exercice 2 (Centrale, pas si simple) : Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \max(\mathrm{Sp}(A + tB))$ est convexe.

(Démo : On a $\max(\mathrm{Sp}(A)) = \sup\left\{(x|Ax)/\|x\|^2 \mid x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\}$, donc f est la borne supérieure de fonctions affines, donc convexes, donc elle est convexe.)

Exercice 3 (plutôt simple) : Soit $A \in \mathcal{O}_n$. Montrer que $\left|\sum_{i,j} a_{ij}\right| \leq n$. Quand a-t-on égalité ?

Exercice 4 (assez difficile - X) : Soient A et B deux matrices symétriques réelles, et $C = A + B$. On note $a_1 \geq ... \geq a_n$ les valeurs propres de A, b_i celles de B et c_i celles de C. Montrer que pour tout i, on a $c_i \geq a_i + b_n$ (en se ramenant au cas $b_n = 0$).

(Démo : On remplace A par $A + b_nI$ et B par $B - b_nI$, ce qui fait que toutes les valeurs propres de B sont positives : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $(Ax|x) \leq (Cx|x)$. Soit (x_i) une BO propre pour A et (y_i) pour C (théorème spectral). Si $z \in \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_i)$, alors $(Az|z) \geq a_i \|z\|^2$, et si $z \in \mathrm{Vect}(y_i, ..., y_n)$, $(Az|z) \leq (Cx|x) \leq c_i \|z\|^2$. Or, il existe un z qui soit dans les deux à la fois (dimensions), donc $a_i \leq c_i$.)

Exercice 5 (classique mais intéressant) : Une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ dans un espace euclidien est dite obtusangle si $\forall (i,j) \in I^2$, $i \neq j \Rightarrow (x_i|x_j) < 0$. Trouver le plus grand cardinal d'une famille obtusangle dans un espace euclidien de dimension n.

(Démo : ce cardinal vaut $n+1$. On peut construire explicitement une famille obtusangle de cardinal $n+1$ par récurrence (s'inspirer du passage de dimension 2 en dimension 3). Pour montrer que c'est le cardinal maximal (ce qu'on peut intuiter à partir des dimensions 2 et 3), deux solutions sont possibles. La première, montrer que si $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ est obtusangle, alors $(x_i)_{1\leq i\leq p-1}$ est libre (adapter pour le cas infini) : On écrit $\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i = 0$, on sépare la somme selon si $\lambda_i > 0$ ($i \in I$) ou $\lambda_i \leq 0$ ($i \in J$) (en disant que quitte à multiplier par -1, $I \neq \varnothing$). Un calcul direct donne $\left\|\sum_{i\in I} \lambda_i x_i\right\|^2 = 0$, et en faisant le produit scalaire de cette somme avec x_p, ça couille. La deuxième, par récurrence : on prend $H = \{x_p\}^\perp$ et on projette les autres vecteurs sur H, en montrant que la famille obtenue est toujours obtusangle (protip : le projeté de x_i sur $\{x_p\}^\perp$, c'est $x_i - \frac{(x_i|x_p)}{\|x_p\|^2} x_p$).