Khôlles de Mathématiques - MPSI 3

Semaine 22 : Déterminants

Damien DESFONTAINES - damien.desfontaines@ens.fr

Cours 1 : Signature d'une permutation : définition, caractérisation, c'est un morphisme de S_n dans $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Cours 2 : Déterminant / formule de développement par une ligne ou une colonne : énoncé, démonstration.

Cours 3 : Déterminant d'une matrice : définition, formule avec la comatrice.

Exercice 1 (plutôt facile) : Calculer le déterminant

$$\begin{pmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & x_n \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (X - difficile) : Soit $p \in \mathbb{P}$, et $(a_0, ..., a_{p-1}) \in \mathbb{Z}^p$. Montrer que la matrice $A = \left(a_{(j-i) \mod p}\right)_{(i,j)\in[[1,p]]^2}$ vérifie $\det(A) \equiv (a_0 + ... + a_{p-1}) \mod p$. On pourra écrire $A = \sum_{i=0}^{p-1} a_i J^i$ pour une certaine matrice J, et calculer A^p.

(Indice : Suivre l'indication, avec $J = (\delta_{i,j+1 \mathrm{mod} p})$. On vérifiera que $\det(A^p) = \det(A)$, et que $A^p = (a_0^p + ... + a_1^p)\, I$.)

Exercice 3 (Centrale - moyen) : Considérons un déterminant symétrique réel d'ordre impair, dont tous les coefficients sont entiers, les diagonaux étant en plus pairs. Montrer qu'un tel déterminant est pair.

(Indice : Dans la formule, séparer les cas $\sigma = \sigma^{-1}$ et $\sigma \neq \sigma^{-1}$. Dans le premier cas, il existe i tel que $\sigma(i) = i$, dans le second on regroupe les termes.)

Exercice 4 (assez facile, mais un peu piégeux) : Soit A un anneau commutatif, et $(x_1, ..., x_n) \in A^n$. Montrer l'équivalence entre :

- Le déterminant de Vandermonde de $(x_i)_{i\in[[1,n]]}$ est un élément inversible de A.
- Pour tous $(y_1, ..., y_n) \in A^n$, il existe un unique polynôme $P \in A_{n-1}[X]$ tel que $\forall i \in [[1, n]]$, $P(x_i) = y_i$.

Exercice 5 (astucieux) : Montrer que deux matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(Indice : écrire $PU = VP$ où P est une matrice complexe, écire $P = R + iS$, du coup $RU = VR$ et $SU = VS$, et faire une combainaison linéaire réelle de R et S pour tomber sur quelque chose d'inversible.)

Exercice 6 (amusant, pas très difficile) : Montrer que tout groupe fini G est isomorphe à un sous-groupe de $S_{|G|}$.

Exercice 7 (ENS - difficile) : Soit $p \in \mathbb{P}$, et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\mathrm{Tr}\left((A + B)^p\right) \equiv \mathrm{Tr}(A^p) + \mathrm{Tr}(B^p)\, [p]$. En déduire que $\mathrm{Tr}(A^p) \equiv \mathrm{Tr}(A)\, [p]$. Application : Soit $(u_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$. Montrer que $\forall p \in \mathbb{P}$, p divise u_p.

(Indice : Pour la première question, s'inspirer du cas où ça commute, et faire tourner les termes de la grosse somme (ça, c'est de l'indice). Pour la seconde, montrer que l'ensemble des matrices A qui vérifient ce qu'on veut est un $\mathbb{Z}$-"espace vectoriel", et montrer que ça marche pour les E_{ij}. Pour la troisième, considérer la matrice associée à la relation de récurrence linéaire $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et constater que $u_n = \mathrm{Tr}(A^n)$ pour les premiers n, et que $A^{n+3} = A^{n+1} + A^n$ pour tout n, la suite $\mathrm{Tr}(A^n)$ vérifie la même relation de récurrence que (u_n) : $u_n = \mathrm{Tr}(A^n)$ pour tout n. En particulier, pour p premier...)

Exercice 8 (10 secondes chrono) : Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre impair est nul.

(Indice : transposer...)

Exercice 9 (rigolo, assez simple) : On considère l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(K)$ défini par $\forall M \in \mathcal{M}_n(K)$, $\varphi(M) = {}^t M$. Calculer le déterminant de φ.