Khôlles de Mathématiques - MPSI 3

Semaine 20 : Calcul matriciel 2

Damien DESFONTAINES - damien.desfontaines@ens.fr

Cours 1 : Opérations élémentaires sur une matrice : expression de ces opérations comme produit par une matrice inversible, intérêt.

Cours 2 : Rang d'une matrice : définition, caractéristion, invariance par transposée..

Cours 3 : Formule de changement de base : énoncé, démonstration.

Exercice 1 (X - moyen) : Soit f une application non constante de $M_n(K)$ dans K, telle que $\forall (A, B) \in (M_n(K))^2$, $f(AB) = f(A) f(B)$. Montrer que $f(A) = 0$ si et seulement si A n'est pas inversible.

(Démo : Montrer que $f(0) = 0$, $f(I_n) = 1$, que $f(A) \neq 0$ si A est inversible, puis montrer que f est soit toujours, soit jamais nulle sur une classe d'équivalence pour conclure.)

Exercice 2 (ENS - plutôt difficile) : Soit K un corps de caractéristique nulle. Montrer qu'une matrice de trace nulle de $M_n(K)$ est semblable à une matrice de diagonale nulle. Puis, montrer qu'une matrice de trace nulle $A \in M_n(K)$ peut s'écrire $A = BC - CB = [B, C]$, où $(B, C) \in (M_n(K))^2$.

(Indice : La première question se fait par récurrence sur n : comme une telle matrice A ne peut pas être une homothétie, on a l'existence d'un vecteur e tel que (e, Ae) est une famille libre, et en complétant cette base, on obtient une écriture de A sympa, sur laquelle on peut appliquer l'hypothèse de récurrence et hop. Pour la seconde question, on peut supposer que A est de diagonale nulle vu que $P^{-1}AP = \left[P^{-1}BP, P^{-1}CP\right]$. Ensuite, on fixe une matrice B "simple" (genre, diagonale), et on regarde l'image de l'endomorphisme $X \longrightarrow BX - XB$. En faisant le calcul, on voit que le noyau de cet endomorphisme est de dimension n si les coefficients diagonaux sont tous différents, donc son image est exactement de dimension $n^2 - n$, ce qui correspond à la dimension de l'ensemble des matrices de diagonale nulle. Et comme l'image est clairement inclue dedans, on a égalité, ce qui suffit pour conclure.)

Exercice 3 (ENS puis X - moyen, puis difficile) : Soit f une forme linéaire de $M_n(K)$ dans K, telle que $\forall (X, Y) \in (M_n(K))^2$, $f(XY) = f(YX)$. Montrer qu'il existe un $\lambda \in K$ tel que $f = \lambda \mathrm{Tr}$. Montrer que $f : M_n(K) \to (M_n(K))^*$ définie par $f(A) = (X \to \mathrm{Tr}(AX))$ est un isomorphisme. Puis, montrer que tout hyperplan de $M_n(K)$ rencontre $GL_n(K)$.

(Indice : montrer l'injectivité pour la deuxième question, avec la base canonique de $M_n(K)$. Pour la troisième question, considérer l'hyperplan comme un noyau de forme linéaire, et utiliser la question précédente pour voir que ça revient à trouver une matrice $X \neq 0$ tel que $\mathrm{Tr}(AX)$, pour une certaine matrice A donnée. À un changement de base près et en utilisant $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$, on peut remplacer A par J_r (où r est le rang de A), et la matrice de permutation convient.)

Exercice 4 (classiquissime) : Soit M une matrice inversible. Montrer que $M^{-1} = P(M)$, pour un certain polynôme P (et en profiter pour donner une borne sur le degré de ce polynôme).

Exercice 5 (plutôt facile) : Soit E l'ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$, et $f : E \longrightarrow E$ définie par $f(M) =^t AM + MA$, où $A \in M_n(\mathbb{R})$. Calculer la trace de f.

(Indice : $(n-1)\,\mathrm{Tr}(A)$. Ne pas oublier de vérifier qu'il s'agit d'un endomorphisme...)

Exercice 6 (encore assez facile) : Soit $A_x \in M_n(K)$ l'ensemble des matrices magiques de somme $x \in K$. Calculer la dimension du sous-espace de $M_n(K)$ formé des matrices magiques. Montrer que le produit de deux matrices magiques est magique. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur x pour qu'aucune matrice de A_x ne soit inversible.

(Indice : $(n-1)^2$, mais il ne faut pas oublier qu'on a "plus" de contraintes que ça.)

Exercice 7 (X - difficile) : Soit G un sous-groupe fini de $GL(\mathbb{R}^n)$, et $F = \bigcap_{g \in G} \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})$. Montrer que $\mathrm{card}(G) \times \dim(F) = \sum_{g \in G} \mathrm{tr}(g)$.

(Démo : Poser $p = \frac{1}{\mathrm{Card}(G)} \sum_{g \in G} g$, montrer que $p^2 = p$. De là, on peut en tirer $F = \mathrm{Im}(p)$, et du coup $\dim(F) = \mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(g)$ (rang d'un projecteur, tout ça), et c'est fini.)