hôlles de Mathématiques - MPSI 3

Semaine 19 : Calcul matriciel

Damien DESFONTAINES - `damien.desfontaines@ens.fr`

Cours 1 : Trace : définition, principales propriétés.

Cours 2 : Théorème fondamental du calcul matriciel : énoncé, démonstration.

Cours 3 : Formule de changement de base : énoncé, démonstration.

Exercice 1 (X - moyen) : Soit f une application non constante de $M_n(K)$ dans K, telle que $\forall (A,B) \in (M_n(K))^2$, $f(AB) = f(A)f(B)$. Montrer que $f(A) = 0$ si et seulement si A n'est pas inversible.

Exercice 2 (X - moyen) : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $X +^t X = (\mathrm{Tr}(X))A$.

(Indice : Faire deux cas suivant si $\mathrm{Tr}(X) = 0$ ou pas. Sinon, on prend la trace et on obtient $\mathrm{Tr}(A) = 2$. Dans ce cas, on écrit $\left(X - \frac{\mathrm{Tr}(X)}{2}A\right) +^t \left(X - \frac{\mathrm{Tr}(X)}{2}A\right) = 0$, donc cette matrice est antisymétrique, et il existe une matrice antisymétrique B telle que $X = \frac{\mathrm{Tr}(X)}{2}A + B$. Réciproquement, si $X = \lambda A + B$ où B est antisymétrique, pouf ça marche.)

Exercice 3 (ENS puis X - moyen, puis difficile) : Soit f une forme linéaire de $M_n(K)$ dans K, telle que $\forall (X,Y) \in (M_n(K))^2$, $f(XY) = f(YX)$. Montrer qu'il existe un $\lambda \in K$ tel que $f = \lambda \mathrm{Tr}$. Montrer que $f : M_n(K) \to (M_n(K))^*$ définie par $f(A) = (X \to \mathrm{Tr}(AX))$ est un isomorphisme. Puis, montrer que tout hyperplan de $M_n(K)$ rencontre $GL_n(K)$.

(Indice : montrer l'injectivité pour la deuxième question, avec la base canonique de $M_n(K)$...)

Exercice 4 (X - facile, facile, moyen puis difficile) : On dit qu'une matrice à coefficients réels A est positive, ce qu'on note $A \geq 0$, si tous ses coefficients sont positifs ou nuls. On dit que $A \in M_n(\mathbb{R})$ est monotone si elle est inversible et si $A^{-1} \geq 0$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est positive si et seulement si pour tout vecteur colonne X, $X \geq 0 \Rightarrow AX \geq 0$. Montrer que A est monotone si et seulement si pour tout vecteur colonne X, $AX \geq 0 \Rightarrow X \geq 0$. Montrer que la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 2+c_1 & -1 & & & \\ -1 & 2+c_2 & -1 & & \\ & -1 & & & \\ & & & & -1 \\ & & & -1 & 2+c_n \end{bmatrix}$$

est monotone. Déterminer les matrices qui sont à la fois positives et monotones.

(Indice pour la dernière question : il s'agit des matrices ayant exactement un coefficient non nul (positif) sur chaque ligne et sur chaque colonne. On vérifie qu'elles marches, et pour vérifier que ce sont les seules, on utilise le raisonnement suivant. Soit A une matrice qui convient. Notons $J = \{i \in [[1,n]] \mid a_{i,1} > 0\}$, $X =^t (x_1, ..., x_n)$ et $Y = AX =^t (y_1, ..., y_n)$. Fixons x_2, ... , x_n strictement positifs. Si $i \notin J$, alors $y_i \geq 0$ quel que soit le choix de x_1. Si $i \in J$, la condition $y_i \geq 0$ équivaut à $x_1 > -\frac{1}{a_{i,1}} \sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_j = z_i$. On va montrer qu'il existe i tel que $z_i = 0$. Si pour tout $i \in J$, on a $z_i < 0$, alors il existe un $x_1 < 0$ qui vérifie cette série d'inégalités, et on aura alors $AX \geq 0$ sans avoir $X \geq 0$, ce qui est impossible car A est monotone. Il existe donc i tel que $z_i = 0$, c'est à dire tel que $a_{ij} = 0$ pour tout $j \neq 1$. Un tel i est unique, sinon A aurait deux lignes proportionnelles. On effectue le même raisonnement pour toutes les colonnes, et pouf on a ce qu'on veut.)

Exercice 5 (classiquissime) : Soit M une matrice inversible. Montrer que $M^{-1} = P(M)$, pour un certain polynôme P (et en profiter pour donner une borne sur le degré de ce polynôme).