Khôlles de Mathématiques - MPSI 3

Semaine 18 : Équations différentielles

Damien DESFONTAINES - damien.desfontaines@ens.fr

Cours 1 : $x^3y' = y\left(3x^2 + y^2\right)$.

(Équation de Bernoulli : diviser par x^3, puis par y^3, poser $u = \frac{1}{y^2}$. On doit obtenir $y = \pm\frac{\sqrt{2}x^3}{\sqrt{2\lambda - x^4}}$ ou $y = 0$.)

Cours 2 : $x^2\left(y' + y^2\right) = xy - 1$.

(Équation de Riccati : trouver la solution particulière $\frac{1}{x}$, remplacer y par $y + \frac{1}{x}$, on obtient une équation de Bernoulli en u qui se résoud à coup de $z = \frac{1}{u}$, on trouve $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x\ln|x| + \lambda x}$ ou $y = \frac{1}{x}$.)

Cours 3 : $y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)e^x$.

($y = (ax+b)e^{2x} + 2xe^x$.)

Cours 4 : $xy' + y = (xy)^{3/2}$

(Bernoulli, $y = \frac{1}{x}\left(\frac{2}{\lambda - x}\right)^2$ ou $y = 0$)

Exercice 1 (Centrale - moyen) : Trouver toutes les fonctions $(f,g) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $\int_0^x f(t)\,dt = x - 1 + g(x)$ et $\int_0^x g(t)\,dt = x - 1 + f(x)$.

(Indice : Poser $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ et $G = \int_0^x g(t)\,dt$, ça fait deux zolies équations différentielles, qu'on résout, qu'on réinjecte pour trouver des conditions sur les constantes, et on trouve $f = g = 1$.)

Exercice 2 (ENS - difficile) : Soient u, v et w trois applications bornées et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, vérifiant $u' + v' = w$, $w' = -v$, et $\int_0^{+\infty}\|u'\|^2 < +\infty$. On suppose qu'il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $(u(t_n))$ tend vers $a \in \mathbb{R}^3$. Montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{1}{2\pi}\int_{t_n}^{t_n+2\pi} u(t)\,dt$ tend vers a. Puis, montrer que les suites $v_n = \frac{1}{2\pi}\int_{t_n}^{t_n+2\pi} v(t)\,dt$ et $w_n = \frac{1}{2\pi}\int_{t_n}^{t_n+2\pi} w(t)\,dt$ convergent vers 0 (on remarquera notamment que l'équation différentielle $y'' + y = z$ admet pour solution particulière $y(t) = \int_{a_0}^t \sin(t-x)\,z(x)\,dx$).

(Indice : Écrire $u_n - u(t_n)$ comme une intégrale, majorer le truc du milieu par Cauchy-Schwartz. Pour la suite, commencer par w : remarquer que $w'' + w = u'$, utiliser l'indication et après c'est facile (on intègre directement en échangeant les intégrales pour w, et on peut intégrer facilement v avec la relation)).

Exercice 3 (rigolo, pas trop dur) : Trouver toutes les fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ qui vérifient $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(-x) = x\cos(x)$.

(Indice : $\frac{sin(x) - x\cos(x)}{2} + \lambda\sinh(x) + \mu\cos(x)$, ça se trouve en dérivant deux fois et avec un bon esprit d'observation pour trouver la solution particulière.)

Exercice 4 (rigolo, assez facile) : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant $f'(x) + f(-x) = e^x$.

Exercice 5 (facile) : Montrer que toute solution de l'équation différentielle $y' + e^{x^2} y = 0$ admet une limite nulle en $+\infty$.

Exercice 6 (moyen) : Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\, f(y)$$

(Indice : $x \longrightarrow \cos(ax)$ ou $x \longrightarrow \cosh(ax)$, en dérivant deux fois et par analyse-synthèse.)

Exercice 7 (assez difficile) : Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $\lim_{+\infty} (f' + f) = 0$. Montrer que $\lim_{+\infty} f = 0$.

(Indice : Poser $g = f + f'$, et écrire f comme solution de l'équation différentielle : $f(x) = e^{-x} \left(f(0) + \int_0^x e^t g(t)\, dt \right)$. Majorer le second terme en le coupant en 2.)

Exercice 8 (X - difficile) : On considère l'équation différentielle $x''(t) + p(t)\, x'(t) + q(t)\, x(t) = 0$, où p et q sont des fonctions continues. Trouver une CNS sur p et q pour qu'il existe deux solutions dont le produit vale 1.

(Indice : Si x et $\frac{1}{x}$ sont solutions, $(x')^2 + qx^2 = 0$, donc une condition nécessaire est $q(t) \leq 0$ et $q = -\frac{(x')^2}{x^2}$ est de classe C^1. Réciproquement, supposons ça et soit $r(t) = \sqrt{-q(t)}$. Si x est solution de $x' = r(t)\, x$, alors sur tout intervalle où q ne s'annule pas, $x'' = rx' + r'x$, on réinjecte, et on trouve $r(t)\, p(t) + r'(t) = 0$, ce qui donne une deuxième condition $p(t)\, q(t) = \frac{1}{2} q'(t)$, suffisante.)