Khôlles de Mathématiques - MPSI 3

Semaine 17 : Espaces vectoriels de dimension finie

Damien DESFONTAINES - damien.desfontaines@ens.fr

Cours 1 : Théorème de Cauchy-Schwartz : énoncé, démonstration.

Cours 2 : Sommes de Riemann : convergence vers f dans le cas continu, convergence en $O\left(\frac{1}{n}\right)$ dans le cas C^1.

Cours 3 : Changement de variables : énoncé, démonstration.

(Rappel : $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$, si φ est de classe C^1 sur $[a,b]$, et telle que $\varphi([a,b])$ soit inclus dans le domaine de définition de f.)

Cours 4 : Théorème fondamental du calcul intégral : énoncé, démonstration.

Exercice 1 (moyen) : On veut démontrer que π est irrationnel. Supposons que $\pi = \frac{a}{b}$. Posons $p_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(bx-a)^n$ et $I_n = \int_0^\pi p_n(x)\sin(x)\,dx$. Montrer que (I_n) tend vers 0, que $p_n(x)$ et ses dérivées successives prennent des valeurs entières en 0 et en π, et que I_n est entier pour tout n. Conclure.

Exercice 2 (pas drôle - X) : Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))\,dx$.

(Indication : on remplace tan par $\frac{\sin}{\cos}$, ça permet de séparer le ln en deux, on gère le terme de gauche en écrivant $\sin(x)+\cos(x) = \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ (hééééé oui), ça fait sortir un truc trivial, et les deux autres trucs se simplifient magiquement. Sérieux, classer des candidats là-dessus, c'est triste.)

Exercice 3 (vaguement plus intéressant - X) : Soit $E = \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que $\forall \epsilon > 0$, $\exists C > 0$, $\forall f \in E$, $\forall x \in [a,b]$:

$$\left|f(x)^2 - f(a)^2\right| \leq C\int_a^b f^2 + \epsilon\int_a^b (f')^2$$

et montrer ensuite que $\forall \epsilon > 0$, $\exists D > 0$, $\forall f \in E$:

$$\sup_{x\in[a,b]}\left(f^2(x)\right) \leq D\int_a^b f^2 + \epsilon\int_a^b (f')^2$$

(Indication : On remplace $f(x)^2 - f(a)^2$ par l'intégrale entre a et x de $2f(t)f'(t)$, on passe la valeur absolue sous l'intégrale, on remplace x par b. Là, ça doit être un réflexe de penser à la majoration $2\alpha\beta \leq \alpha^2+\beta^2$, ici ça ne suffit pas, donc on la modifie un peu par la majoration $2\alpha\beta \leq C\alpha^2 + \frac{1}{C}\beta^2$. Et pouf, ça suffit. Pour la seconde question, on écrit $f^2(x) \leq f^2(t) + \int_t^x 2f(u)f'(u)\,du$ (formule vraie pour tout $t \in [a,b]$), on majore le dernier terme par l'intégrale de la valeur absolue entre a et b (violemment, oui), on intègre entre a et b, on divise par $b-a$, et il suffit de raisonner comme dans la première question pour conclure.)

Exercice 4 (piège et bidouillage plutôt facile - ENS) : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Calculer la limite de

$$u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n+1}\right) f'\left(\frac{k+1}{n+1}\right)$$

(Indication : c'est presque une somme de Riemann, faisons donc la différence avec une vraie somme de Riemann. Il suffit ensuite d'utiliser le théorème des accroissements finis pour majorer $f'\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f'\left(\frac{k}{n+1}\right)$ et ça tombe tout seul.)

Exercice 5 (facile, puis moins facile - X) : Soit f une fonction continue et strictement positive sur $[a,b]$, et soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une unique subdivision $(x_0, ..., x_n)$ de $[a,b]$ telle que, $\forall k \in [[1,n]]$, on ait :

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,dt = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)\,dt$$

et trouver la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)$.

(Indication : la première question est immédiate. Pour la seconde, si on pose $I = \int_a^b f(t)\,dt$ et $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, la somme vaut $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(f \circ F^{-1}\right)\left(\frac{k}{n}I\right)$. Ooooooh, une somme de Riemann. Ça donne donc une intégrale, on fait le changement de variable $u = F^{-1}(t)$, et on obtient $\frac{1}{I}\int_a^b f^2$.)

Exercice 6 (difficile - ENS) : *Critère de Weyl.* Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de $[0,1]$. Pour tout couple (a,b) tel que $0 \leq a \leq b \leq 1$, on pose :

$$X_n(a,b) = \text{Card}\left\{k \in [[1,n]] \mid u_k \in [a,b]\right\}$$

prouver l'équivalence des propriétés suivantes :

1. $\frac{X_n(a,b)}{n}$ tend vers $b-a$ pour tout couple (a,b) (on dit que la suite est *équirépartie*)
2. $\forall f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, on a :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) = \int_0^1 f(t)\,dt$$

3. $\forall p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p u_k} = 0$$

(Indication : dans le sens $1 \Rightarrow 2$, on remarque que c'est vrai pour les fonctions caractéristiques d'un segment (par hypothèse), et donc pour les fonctions en escalier par combinaison linéaire. Maintenant, on approche uniformément une fonction f par une fonction en escalier g, on coupe $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) - \int_0^1 f\right|$ en trois par inégalité triangulaire en rajoutant $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(u_k)$ et $\int_0^1 g$, on majore tranquillement les trois termes, et pouf c'est aussi petit qu'on veut. Dans le sens $2 \Rightarrow 1$, on approche la fonction caractéristique de $[\alpha, \beta]$, par des fonctions affines par morceaux. On fait des calculs et ça marche bien.)

Exercice 7 (facile, moyen, puis astucieux - ENS) : Soit $n \geq 1$ et $L_n(X) = \frac{d^n}{dX^n}\left(X^2-1\right)^n$. Montrer que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_{-1}^{1} Q(x)\,L_n(x)\,dx = 0$$

puis montrer que L_n admet n racines simples $(x_1, ..., x_n)$ se trouvant dans l'intervalle $]-1,1[$, et montrer enfin qu'il existe $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{2n-1}, \int_{-1}^{1} Q(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Q(x_i)$$

(Indication : On calcule l'intégrale par partie en intégrant L_n et en dérivant Q, le truc entre crochets est nul, on recommence, pouf pouf pouf tout est nul. Ensuite, on peut appliquer le théorème de Rolle à $\left(X^2-1\right)^n$, puis à sa dérivée, et ainsi de suite jusqu'à sa dérivée $(n-1)$-ième, mais on peut aussi appliquer la question précédente. On note $x_1 < ... < x_p$ les racines de L_n, qui sont dans l'intervalle $]-1,1[$ et qui sont de la multiplicité impaire. La fonction $x \longrightarrow (x-x_1)...(x-x_p)\,L_n(x)$ a donc un signe constant sur l'intervalle $]-1,1[$, et si $p < n-1$, ça induit une contradiction avec la question précédente. On a donc $p \geq n$, mais p ne peut bien entendu pas être plus grand que n, pouf c'est fini. Pour la dernière question, les applications $g_k : Q \longrightarrow Q(x_k)$ sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$, de même que l'application $f : Q \longrightarrow \int_{-1}^{1} Q(x)\,dx$, on veut donc prouver que $f \in \text{Vect}(g_1, ..., g_n)$. Pour ça, il suffit que f soit nulle sur le sous-espace $\bigcap_{i=1}^{n} \text{Ker}(g_i)$. Si c'est le cas, on a $Q(x_i) = 0$ pour tout i, donc Q est divisible par L_n. On écrit $Q = RL_n$, on utilise la question 1, c'est fini.)

Exercice 8 (facile - X) : Calculer :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$$

(Indication : encadrement classique, somme de Riemann, $\frac{2}{3}$.)

Exercice 9 (assez difficile - X) : Soit $y \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. On suppose que $\forall u \in \mathcal{C}^\infty([a,b],\mathbb{R})$, $\int_a^b u(t)\,dt = 0 \Rightarrow \int_a^b u(t)\,y(t)\,dt = 0$. Montrer que y est constante. Que dire si $\int_a^b u(t)\,y(t)\,dt = 0$ pour toute fonction $u \in \mathcal{C}^\infty([a,b],\mathbb{R})$ telle que $u(a) = u(b)$? On admettra le théorème de Weierstrass.

(Indication : Notons $E = \mathcal{C}^\infty([a,b],\mathbb{R})$ et remarquons que si on suppose que $\int_a^b uy = 0$ pour toute fonction $u \in E$, on a clairement $y = 0$ (en effet, c'est vrai pour les polynômes, on fait une suite de polynômes qui tend vers y, pouf). On va se ramener à ce cas pour les deux questions. Soit $I : u \longrightarrow \int_a^b u$ et $I_y : u \longrightarrow \int_a^b yu$. L'hypothèse se traduit par $\text{Ker}(I) \subset \text{Ker}(I_y)$, ce qui implique que $I_y = \lambda I$ pour un certain λ. On pose $z = y - \lambda$, on a alors $\forall u \in E$, $\int_a^b uz = I_y(u) - \lambda I(u) = 0$, donc d'après la remarque, $z = 0$ et $y = \lambda$, donc y est constante. Ensuite, la condition $u(a) = u(b)$ s'écrit $\int_a^b u' = 0$, donc soit $v \in E$ d'intégrale nulle entre a et b, et soit u la primitive de v qui s'annule en a (et donc en b). Par hypothèse, $\int_a^b uy = 0$, on considère une primitive Y de y, on intègre par partie, on obtient $\int_a^b vY = 0$, c'est vrai pour toute fonction $v \in E$ telle que $\int_a^b v(t)\,dt = 0$, donc d'après la question précédente, Y est constante et sa dérivée est nulle.)