Khôlles de Mathématiques - MPSI 3

Semaine 13 : Espaces vectoriels

Damien DESFONTAINES - damien.desfontaines@ens.fr

Cours 1 : Vect (A) : Définition, caractérisation, équivalence entre les deux.

Cours 2 : Applications linéaires : définition. Caractéristion des applications linéaires injectives.

Cours 3 : Sous-espaces vectoriels supplémentaires : définition, caractérisation, équivalence entre les deux.

Cours 4 : Projection : définition, caractérisation, propriétés.

Exercice 1 (facile - X) : Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E tels que $\text{Im}\,(p) \subset \text{Ker}\,(q)$, et $r = p + q - pq$. Montrer que r est un projecteur, trouver son image et son noyau.

Exercice 2 (difficile - ENS) : *Théorème de Maschke.* Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, G un sous-groupe fini de $GL\,(E)$, et F un sous-espace vectoriel de E stable par tous les éléments de G. Montrer que F admet un supplémentaire stable par tous les éléments de G.

(Indications : commencer par montrer que ça équivaut à trouver un projecteur p d'image F tel qu $\text{Im}\,(p)$ et $\text{Ker}\,(p)$ soient stables par tous les éléments de G. Ensuite, montrer que ça équivaut à trouver un projecteur p qui commute avec tous les éléments de G. Puis, l'idée fondamentale est de prendre un projecteur quelconque d'image F, et de moyenner ses conjugués selon les éléments de G.)

Exercice 3 (plutôt difficile - X) : Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $f : E \to F$ et $g : E \to G$ des applications linéaires. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f et g pour qu'il existe $h : F \to G$ linéaire telle que $g = h \circ f$. Maintenant, soit $g : E \to G$ et $h : F \to G$ des applications linéaires. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f : E \to F$ vérifiant $g = h \circ f$.

Exercice 4 (facile, puis moyen) : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul, et $u \in \mathcal{L}\,(E)$ vérifiant $\forall x \in E$, $\exists \lambda_x \in \mathbb{K}$, $u\,(x) = \lambda_x x$. Que peut-on dire de u ? En déduire le centre de $\mathcal{L}\,(E)$.

Exercice 5 (facile) : Trouver un exemple d'une application linéaire injective d'un espace vectoriel dans lui-même qui ne soit pas surjective.

Exercice 6 (devrait être facile) : Trouver, pour tout $N \geq 3$, un exemple de N sous-espaces vectoriels $(E_i)_{i \in [[1,N]]}$ d'un même espace vectoriel qui soient en somme directe deux à deux, mais pas tous les E_i. Bonus : tels qu'en en prenant trois quelconques, on ne tombe jamais sur une somme directe. Superbonus : trouver l'exemple le plus simple que l'on puisse imaginer. Mégabonus : même chose en remplaçant 2 par n et 3 par $n+1$, pour $n \geq 2$.

Exercice 7 (facile) : Soit E un espace vectoriel (incroyable). On munit l'ensemble des projections de $\mathcal{L}\,(E)$ de la relation suivante :

$$p \preccurlyeq q \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = p$$

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre. La caractériser en terme d'image et de noyaux.

Exercice 8 (facile) : Soient f et g deux formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E telle que $\forall x \in E,\ f(x)\,g(x) = 0$. Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$.

Exercice 9 (plutôt difficile - ENS) : Soit K un corps infini, et E un K-espace vectoriel. Montrer qu'il est impossible de trouver n sous-espaces vectoriels stricts $V_1, \dots, V_n$ de E vérifiant $V_1 \cup \dots \cup V_n = E$. Cela reste-t-il vrai si K est fini ? Trouver un minimum pour n dans ce cas-là, montrer qu'il est atteint.

(Indication : On peut supposer n minimal, et trouver un $x \in V_n \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_{n-1})$ et un $y \in (V_1 \cup \dots \cup V_{n-1}) \setminus V_n$ (pourquoi ?). Alors pour n'importe quel $\lambda \in K$, on peut dire quelque chose d'intéressant sur $y + \lambda x$.)