lKhôlles de Mathématiques - MPSI 3

Semaine 12 - Développements limités

Damien DESFONTAINES - `damien.desfontaines@ens.fr`

Cours 1 : Équivalence entre existence d'un développement limité à l'ordre 1 et dérivabilité, contre-exemple à l'ordre 2.

Cours 2 : Unicité du développement limité, composition de développements limités.

Cours 3 : Intégration de développements limités, produit de développements limités.

Exercice 1 - Facile : Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2(x)}-\frac{1}{\sinh^2(x)}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left((\cosh(x))^{\alpha}-(\sinh(x))^{\alpha}\right)$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{1+c^x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Exercice 2 - Un peu plus difficile : Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}}\left(\frac{\cos(\pi x)}{4x^2-9}\right)$$
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^x-1}{\ln(x)-x+1}\right)$$
$$\lim_{x\to 1}\left((2-x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right)$$

Exercice 3 - Moyen : Calculer $\lim_{n\to\infty}\left(\sum\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\right)$, généraliser (en remplaçant sin par une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ valant 0 en 0).

Exercice 4 - Pas très fun : On pose $f(x)=\frac{1}{1+x}$, $g(x)=e^{-x}$, $h(x)=\sqrt{1-2\sin(x)}$, $k(x)=\cos\left(\sqrt{2x}\right)$. Donner les positions respectives des courbes représentatives de f, g, h et k au voisinage de 0, en commençant par préciser si c'est susceptible de varier entre 0^+ et 0^-.

Exercice 5 - Plus rigolo (X) : Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $\tau_n=\{d\in\mathbb{N}\mid d|n\}$, et si $x\geq 1$, on pose $F(x)=\sum_{1\leq n\leq x}\tau_n$. Trouver un équivalent simple de $F(x)$ en $+\infty$. Montrer ensuite que $F(x)=x\ln(x)+(2\gamma-1)x+O(\sqrt{x})$.

Exercice 6 - Moyen (X) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels vérifiant $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n^5+nu_n-1=0$. Comportement asymptotique de u_n ?

Exercice 7 - Amusant : Soit A un anneau tel que 2 soit inversible, et x un élément nilpotent. Montrer qu'il existe $y\in A$ tel que $y^2=1-x$.

Exercice 8 - Vaguement intéressant : Soit $f:\,]-1,1[\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)\longrightarrow x+\ln(1+x)$. Démontrer que f réalise une bijection sur un espace que l'on précisera, donner un développement limité de la réciproque à l'ordre 3.