Khôlles de Mathématiques - MPSI 3

Semaine 10 - Fonctions dérivables

Damien DESFONTAINES - `damien.desfontaines@ens.fr`

Cours 1 : Théorème de Rolle, application au théorème des accroissements finis.

Cours 2 : Formule de Taylor-Lagrange, inégalité de Taylor-Lagrange. Démonstration.

Cours 3 : Fonctions convexes : définition, interprétation graphique, caractérisation.

Exercice 1 (piégeux) : Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, qui s'annule en une infinité de points. Montrer que sa dérivée s'annule aussi en une infinité de points.

Exercice 2 (assez facile) : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est décroissante. En déduire que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie les mêmes hypothèses, f est constante.

Exercice 3 (difficile - X MP 2006) : Trouver un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f(x))^2 + (1 + f'(x))^2 \leq 1$. Montrer que cet exemple est le seul possible.

(Indications : Commencer par trouver des informations sur f : caractère borné (ou non), monotonie (ou non), limites en $\pm\infty$ (ou non)... Puis, par l'absurde, montrer que les limites qu'on obtient sont nulles toutes les deux pour conclure.)

Exercice 4 (moyen, puis difficile - X) : Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues, de classe C^2 sur $]0,1[$, vérifiant $\forall x \in]0,1[$, $|f''(x)| \leq 1$. Pour $f \in \mathcal{E}$, on note $A(f) = f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)$. Montrer que A est bornée, déterminer $M = \sup_{f \in \mathcal{E}} A(f)$, et résoudre l'équation $A(f) = M$ dans $\mathcal{E}$.

(Indications : Poser pour simplifier $g(t) = f\left(t + \frac{1}{2}\right) - f(t)$: on peut ainsi réécrire $A(f)$ en fonction de g plus simplement, et ça nous permet par exemple d'user et d'abuser du théorème des accroissements finis pour trouver M. Trouver un exemple de fonction telle que la borne soit atteinte ne devrait pas poser de problème. Pour résoudre totalement l'équation, il est utile de commencer par avoir des renseignements supplémentaires de régularité sur f et g : sont-elles C^1 ? Une fois qu'on l'on a prouvé que oui, on peut écrire l'expression de $g'(t)$ sous forme intégrale, et ça devrait suffire pour conclure.)

Exercice 5 (moyen - ENS) : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que si f admet un minimum local, il s'agit d'un minimum global. Que dire de l'ensemble des points où ce minimum est atteint ? On suppose de plus que f est dérivable, et qu'il existe un réel a tel que $f'(a) = 0$: montrer que f admet en a un minimum global. Pour finir, on suppose que f est deux fois dérivable, et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \geq \alpha$: montrer que f possède un minimum unique. Cela reste-t-il vrai si on a uniquement $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) > 0$?

(Indication : Non. Pas besoin.)

Exercice 6 (vraiment difficile - ENS) : Soient $(f_1, ..., f_n)$ des fonctions convexes et continues sur $[0,1]$. Montrer qu'on a $\forall x \in [0,1]$, $\sup(f_1(x), ..., f_n(x)) \geq 0$ si et seulement si il existe n réels positifs α_1, ... , α_n vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, et $\forall x \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) \geq 0$.

(Indication : Commencer par trouver le sens trivial. Pour l'autre sens, raisonner par récurrence. Pour $n = 2$, on pose $h = \sup(f_1, f_2)$, et on s'amuse : on montre que h est continue, convexe, qu'elle admet un minimum en un point x_0 vérifiant $f_1(x_0) = f_2(x_0)$, que ce minimum est unique, que les dérivées à gauche de f_1 et f_2 sont de signes opposés en x_0, on rend cette dérivée nulle, on montre que ça marche. L'hérédité est une blague en comparaison de l'initialisation.)

Exercice 7 (moyen - ENS) : Soit P un polynôme de degré impair, et $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq |P(x)|$. Que dire de f ?

Exercice 8 (moyen - X) : Soit $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ vérifiant $f(0) > 0$, $f'(0) > 0$ et $\lim_{+\infty} f = 0$. Montrer qu'il existe $x_1 > 0$ tel que $f'(x_1) = 0$, puis montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x_n) = 0$.

(Indication : Construire la suite par récurrence, en montrant que c'est possible à chaque étape. Pour cela, un raisonnement par l'absurde et une application intelligente de la formule de Taylor-Lagrange devraient aboutir à quelque chose de sympa.)