Khôlles de Mathématiques - MPSI 3

Semaine 9 - Récurrence, dénombrement, arithmétique

Damien DESFONTAINES - damien.desfontaines@ens.fr

Cours 1 : Démontrer la validité du principe du raisonnement par récurrence.

Cours 2 : Algorithme d'Euclide : énoncé, démonstration.

Cours 3 : Théorème de Gauss, théorème de Bézout : énoncé, démonstration.

Cours 4 : Théorème fondamental de l'arithmétique : énoncé, démonstration.

Exercice 1 (difficile) : On va montrer qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(f(n)) = n + 4217$ [n'importe quel nombre impair convient]. Soit f une telle application. On pose $E = \{0, ..., 4216\}$, $F = \mathbb{N} \backslash E$, $G = f(\mathbb{N}) \cap E$, $H = E \backslash G$. Montrer que f est injective, que $f(F) \subset F$, que $f^{-1}(F) = F \cup G$, et que $f^{-1}(G) = H$. Conclure.

Exercice 2 (assez difficile) : Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(f(n)) < f(n+1)$. Trouver un exemple d'une telle fonction f. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \geq n$, $f(k) \geq n$. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $a \geq n$ tel que $f(a) = \min\{f(k) \mid k \geq n\}$: montrer que a existe, et que $a = n$. En déduire que f est strictement croissante, conclure.

Exercice 3 (moyen) : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe n entiers consécutifs tous non premiers.

Exercice 4 (moyen) : Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier.

Exercice 5 (rigolo) : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \notin \mathbb{N}$.

Exercice 6 (fun) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs de n. Calculer $\prod_{d|n} d$ en fonction de d_n et de n.

Exercice 7 (facile) : Dans une soirée mondaine accueillant un nombre fini de personnes, des poignées de main sont échangées. Montrer que le nombre de personnes ayant serré la main à un nombre impair de personnes est pair.

Exercice 8 (très facile) : Montrer que sur Facebook, il existe deux personnes ayant le même nombre d'amis.

Exercice 9 (moyen) : Soit E un ensemble de cardinal n. Trouver :

$$\mathrm{Card}\left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \mid A \cup B = E\right\}$$

Exercice 10 (moyen) : Combien existe-t-il de parties à p éléments de $\{1, ..., n\}$ ne contenant pas deux entiers consécutifs ?

Exercice 11 (moyen) : Soit E un ensemble à n éléments. Combien y a-t-il de lois de composition internes sur E ? Commutatives ? Admettant un neutre ? Commutatives et admettant un neutre ?

Exercice 12 (moyen) : On désire placer n couples autour d'une table. Combien y a-t-il de dispositions possibles au total ? En respectant l'alternance des sexes ? En ne séparant pas les couples ? En respectant les deux conditions précédentes ?

Exercice 13 (facile) : On considère n droites dans un plan, 2 à 2 non parallèles. Combien forment-elles de triangles ?

Exercice 14 (difficile) : Quel est le nombre moyen de points fixes des éléments de S_n ? Le nombre moyen d'inversions ?

Exercice 15 (moyen, puis très difficile) : Soit μ la fonction de Möbius ($f(n) = 0$ si n est divisible par un carré parfait différent de 1, 1 si n est le produit d'un nombre pair de nombres premiers distincts, et -1 sinon). Montrer que pour toute fonction arithmétique vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$, alors $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right)$ (formule de Möbius). Pour ça, montrer que $\sum_{d|n} \mu(d) = 1$ si $n = 1$ et 0 sinon. Montrer ensuite que les fonctions arithmétiques multiplicatives forment un groupe.