# Khôlles de Mathématiques - MPSI 3

Semaine 7 - Suites réelles et complexes

*Damien DESFONTAINES* - `damien.desfontaines@ens.fr`

**Cours 1 :** Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En déduire que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

**Cours 2 :** Théorème de Bolzano-Weierstrass : énoncé, démonstration.

**Cours 3 :** Critère de Cauchy : énoncé, démonstration.

**Exercice 1 (moyen) :** Soit $(u_n)$ une suite réelle ou complexe convergeant vers $l$, et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection quelconque. Montrer que $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ converge aussi vers $l$.

**Exercice 2 (moyen) :** Trouver $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites réelles telles que $u_n = O(v_n)$, mais telles que $u_n \neq o(v_n)$ et $v_n \neq O(u_n)$.

**Exercice 3 (moyen) :** Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites réelles tendant vers $+\infty$ telles que $u_n = o(v_n)$. Montrer qu'il existe une suite $(w_n)$ tendant vers $+\infty$ et vérifiant $u_n = o(w_n)$ et $w_n = o(v_n)$.

**Exercice 4 (moyen, puis difficile) :** Trouver une suite qui admet une infinité de valeurs d'adhérence. Puis, trouver une suite bornée admettant une infinité de valeurs d'adhérence. Enfin, trouver une suite telle que tout réel en soit valeur d'adhérence, et que tout complexe en soit valeur d'adhérence.

**Exercice 5 (moyen, puis difficile) :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle convergeant vers $l$. On définit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{u_1+\ldots+u_n}{n}$. Montrer que $(v_n)$ converge aussi vers $l$. La réciproque est-elle vraie ? Est-elle vraie si on suppose de plus $u_{n+1} - u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ ? $u_{n+1} - u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ?

**Exercice 6 (facile, puis difficile) :** Soit $(u_n)$ une suite réelle bornée. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$. On suppose que $(w_n)$ converge. Montrer que $(w_n)$ converge vers 0 et (plus difficile) que $(v_n)$ aussi.

**Exercice 7 (facile, puis assez difficile) :** Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $E(x)$ sa partie entière et $\delta(x) = x - E(x)$ sa partie fractionnaire. Montrer que la suite $\left(\delta\left(\sqrt{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite, puis montrer qu'elle est dense dans $[0,1]$.

**Exercice 8 (moyen) :** Soit $(u_n)$ une suite réelle telle que $(u_{2n})$, $(u_{2n+1})$ et $(u_{n^2})$ convergent. Montrer que $(u_n)$ converge et trouver sa limite.

**Exercice 9 (facile, puis moyen) :** Montrer qu'une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ convergente est stationnaire. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, et $(u_n)$ une suite de rationnels convergeant vers $x$. On pose $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{p_n}{q_n}$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} |p_n| = \lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty$$

(Indication : Raisonner par l'absurde : on suppose que $\lim_{n\to+\infty} q_n \neq +\infty$. Montrer qu'on peut extraire une sous-suite $\left(q_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, en déduire que $\left(p_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi, montrer qu'on obtient une contradiction en s'aidant du 1), conclure.)

**Exercice 10 (moyen) :** Montrer que la suite $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

**Exercice 11 (facile) :** Soient $(a,b) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$. Trouver la limite de $\left(\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exercice 12 (moyen) :** Montrer que de toute suite réelle, on peut extraire une sous-suite monotone.

**Exercice 13 (plutôt facile) :** Soit $(u_n)$ une suite réelle bornée, telle que $(u_{n+1}-u_n)$ soit monotone. Montrer que $(u_n)$ converge. Est-ce toujours vrai dans le cas d'une suite complexe ?

**Exercice 14 (facile) :** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$. En déduire la nature de la suite $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.