Khôlles de Mathématiques - MPSI 3

Semaine 6 - Suites réelles

Damien DESFONTAINES - `damien.desfontaines@ens.fr`

Cours 1 : Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En déduire que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Cours 2 : Donner la définition de la valeur d'adhérence d'une suite, la caractérisation par des suites extraites et démontrer l'équivalence entre les deux propriétés.

Cours 3 : Démontrer qu'une suite réelle monotone bornée converge.

Exercice 1 (moyen) : Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers l, et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection quelconque. Montrer que $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ converge aussi vers l.

Exercice 2 (moyen) : Trouver (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n = O\left(v_n\right)$, mais telles que $u_n \neq o\left(v_n\right)$ et $v_n \neq O\left(u_n\right)$.

Exercice 3 (moyen) : Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles tendant vers $+\infty$ telles que $u_n = o\left(v_n\right)$. Montrer qu'il existe une suite (w_n) tendant vers $+\infty$ et vérifiant $u_n = o\left(w_n\right)$ et $w_n = o\left(v_n\right)$.

Exercice 4 (moyen, puis difficile) : Trouver une suite qui admet une infinité de valeurs d'adhérence. Puis, trouver une suite bornée admettant une infinité de valeurs d'adhérence. Enfin, trouver une suite telle que tout réel en soit valeur d'adhérence.

Exercice 5 (moyen, puis difficile) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle convergeant vers l. On définit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{u_1+\ldots+u_n}{n}$. Montrer que (v_n) converge aussi vers l. La réciproque est-elle vraie ? Est-elle vraie si on suppose de plus $u_{n+1} - u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$? $u_{n+1} - u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$?

Exercice 6 (facile, puis difficile) : Soit (u_n) une suite réelle bornée. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$. On suppose que (w_n) converge. Montrer que (w_n) converge vers 0 et (plus difficile) que (v_n) aussi.

Exercice 7 (facile, puis assez difficile) : Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $E\left(x\right)$ sa partie entière et $\delta\left(x\right) = x - E\left(x\right)$ sa partie fractionnaire. Montrer que la suite $\left(\delta\left(\sqrt{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite, puis montrer qu'elle est dense dans $[0, 1]$.

Exercice 8 (moyen) : Soit (u_n) une suite réelle telle que (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{n^2}) convergent. Montrer que (u_n) converge et trouver sa limite.

Exercice 9 (facile, puis difficile) : Montrer qu'une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ convergente est stationnaire. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, et (u_n) une suite de rationnels convergeant vers x. On pose $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{N}^*\right)^{\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{p_n}{q_n}$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} |p_n| = \lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty$$

(Indication : Raisonner par l'absurde : on suppose que $\lim_{n\to+\infty} q_n \neq +\infty$. Montrer qu'on peut extraire une sous-suite $\left(q_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, en déduire que $\left(p_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi, montrer qu'on obtient une contradiction en s'aidant du 1), conclure.)

Exercice 10 (moyen) : Montrer que la suite $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 11 (facile) : Soient $(a,b) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$. Trouver la limite de $\left(\frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.