Khôlles de Mathématiques - MPSI 3

Semaine 5 - Suites réelles

Damien DESFONTAINES - `damien.desfontaines@ens.fr`

Cours 1 : Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En déduire que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Cours 2 : Donner la définition de la valeur d'adhérence d'une suite, la caractérisation par des suites extraites et démontrer l'équivalence entre les deux propriétés.

Cours 3 : Démontrer qu'une suite réelle croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) converge.

Exercice 1 (moyen) : Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers l, et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection quelconque. Montrer que $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ converge aussi vers l.

Exercice 2 (moyen) : Trouver (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n = O\left(v_n\right)$, mais telles que $u_n \neq o\left(v_n\right)$ et $v_n \neq O\left(u_n\right)$.

Exercice 3 (moyen) : Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles tendant vers $+\infty$ telles que $u_n = o\left(v_n\right)$. Montrer qu'il existe une suite (w_n) tendant vers $+\infty$ et vérifiant $u_n = o\left(w_n\right)$ et $w_n = o\left(v_n\right)$.

Exercice 4 (moyen, puis difficile) : Trouver une suite qui admet une infinité de valeurs d'adhérence. Puis, trouver une suite bornée admettant une infinité de valeurs d'adhérence.