Khôlles de Mathématiques - MPSI 3

Semaine 4 : Géométrie élémentaire

Damien DESFONTAINES - damien.desfontaines@ens.fr

Cours 1 : Soient A et B deux points d'un plan orthonormé. Exprimer l'ensemble des points M tels que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} &= 0 \\ MB &= k \times MA \\ \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) &= \alpha\,[\pi] \end{aligned}$$

Cours 2 : Par quoi est représentée une rotation de centre Ω et d'angle θ dans le plan complexe ? Démonstration.

Cours 3 : Soient D et D' deux droits d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$. Condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c, a', b', c') pour que les droites soient parallèles, perpendiculaires, confondues ?

Exercice 1 (difficile) : Soit R un rectangle tel qu'il existe une partition de ce rectangle en rectangles R_1, ... , R_n ayant tous (au moins) un côté entier. Montrer que R a au moins un côté entier.

Indication : Montrer que pour tout entier premier p, un des côtés de R a une partie fractionnaire inférieure à $\frac{1}{p}$.

Indication 2 : Pour cela, réaliser une homothétie de rapport p sur la figure et étudier la figure obtenue en remplaçant tous les points (x, y) par $(\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor)$.

Exercice 2 (facile) : Calculer l'aire d'un polygone régulier en fonction de son nombre de côtés et de son rayon, puis en fonction de son apothème et de son périmètre. Application au dodécaèdre.

Exercice 3 (moyen) : Dans un plan euclidien orthonormé, on appelle f l'application qui à un réel $R \geq \sqrt{2}$ associe le nombre de points dont les deux coordonnées sont entières et qui sont compris dans le disque de centre 0 et de rayon R. Montrer que :

$$\pi \left(R - \sqrt{2}\right)^2 \leq f(R) \leq \pi \left(R + \sqrt{2}\right)^2$$

Exercice 4 (moyen) : Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$\begin{cases} \cos(a) + \cos(b) + \cos(c) = 0 \\ \sin(a) + \sin(b) + \sin(c) = 0 \end{cases}$$

montrer que :

$$\begin{cases} \cos(2a) + \cos(2b) + \cos(2c) = 0 \\ \sin(2a) + \sin(2b) + \sin(2c) = 0 \end{cases}$$

Exercice 5 (facile, puis moyen) : *Théorème de Ptolémée.* Soient A, B, C et D quatre points d'un plan euclidien. Montrer que :

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} \leq \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}$$

et montrer que cette inégalité est une égalité si (et seulement si) $ABCD$ est un quadrilatère inscriptible.

Exercice 6 (facile) : Soient C et C' deux cercles. Deux points M et M' décrivent (respectivement) C et C' de telle sorte que la tangente à C en M et la tangente à C' en M' soient orthogonales. Donner l'ensemble des points décrit par le milieu de $[MM']$.

Exercice 7 (moyen) : Montrer que le rayon qui joint un sommet d'un triangle au centre de son cercle circonscrit est perpendiculaire à la droite joignant les pieds des hauteurs des deux autres côtés.

Exercice 8 (moyen) : Soit P un polygone dont tous les sommets ont une coordonnées entières, I son intérieur, et C l'ensemble des points de ses côtés. Montrer que :

$$\text{Aire}\,(P) = \#I + \frac{1}{2}\#C - 1$$

où $\#A = \text{Card}\left\{(x,y) \in A \mid (x,y) \in \mathbb{Z}^2\right\}$.

Indication : Procéder par récurrence sur le nombre de côtés du polygone, et montrer que la formule reste vraie quand on "colle" deux polygones.

Exercice 9 (difficile) : Soient $(A_1, ..., A_n)$ et $(B_1, ..., B_n)$ des points d'un plan. Montrer qu'il existe $\sigma \in S_n$ telle que $\forall\,(i,j) \in [[1,n]]^2$, on ait :

$$i \neq j \Rightarrow \left[A_i B_{\sigma(i)}\right] \cap \left[A_j B_{\sigma(j)}\right] = \varnothing$$

Indication : Procéder par récurrence et séparer les cas "L'enveloppe convexe de la figure est égale à $\text{Conv}\,\{A_i \mid i \in [[1,n]]\}$", "L'enveloppe convexe de la figure est égale à $\text{Conv}\,\{B_i \mid i \in [[1,n]]\}$", ou bien aucun des deux cas précédents n'est vérifié.

Exercice 10 (facile) : Soit ABC un triangle, $A_1 = \text{Bar}\,(B:2\,,\,C:1)$, $B_1 = \text{Bar}\,(C:2\,,\,A:1)$, $C_1 = \text{Bar}\,(A:2\,,\,B:1)$, et $A_2B_2C_2$ le triangle intérieur obtenu par intersection des droites (AA_1), (BB_1) et (CC_1). Calculer l'aire de $A_2B_2C_2$ en fonction de celle de ABC.