Khôlles de Mathématiques - MPSI 3

Semaine 2 : Groupes, Anneaux, Symboles $\sum$ et $\prod$

Damien DESFONTAINES - damien.desfontaines@ens.fr

Cours 1 (Groupes) : Donner la définition d'un morphisme injectif, ainsi que sa caractérisation, et démontrer l'équivalence entre les deux.

Cours 2 (Groupes) : Énoncer et démontrer le théorème de Lagrange.

Cours 3 (Anneaux) : Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

Exercice 1 (facile, puis moyen) : Soit G un sous-groupe fini vérifiant $\forall x \in G$, $x^2 = 1$.

1. Montrer que G est commutatif.
2. Montrer que le cardinal de G est une puissance de 2, et montrer que pour tout diviseur d du cardinal de G, il existe un sous-groupe H de G de cardinal d

Indication : Pour un sous-groupe H de G distinct de G, et pour un $x \in G \backslash G$, on pourra chercher à expliciter le plus petit sous-groupe de G contenant à la fois x et H.

Exercice 2 (pas très drôle) : Montrer que si G est un groupe de cardinal inférieur ou égal à 5, alors G est commutatif. Est-ce toujours vrai si $\text{card}\,(G) = 6$?

Exercice 3 (classique) : Montrer que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 (facile, puis moyen) : Montrer que tout groupe G de cardinal p premier est cyclique. Déterminer l'ensemble des sous-groupes de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

Exercice 5 (astucieux) : Montrer qu'il n'existe pas de morphisme de groupes surjectif de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Q}^*, \times)$.

Exercice 6 (difficile) : Soit G un groupe fini et φ un morphisme involutif de G dans lui-même tel que $\varphi(x) = x \Rightarrow x = 1$. Montrer que G est abélien.

Indication : Poser $\psi : x \to x\varphi\left(x^{-1}\right)$ et montrer que ψ est surjective. Puis, vérifier que $\varphi(x) = x^{-1}$ pour tout $x \in G$.

Exercice 7 (plutôt difficile) : Soient A et B deux parties d'un groupe fini G vérifiant :

$$\text{card}\,(A) + \text{card}\,(B) > \text{card}\,(G)$$

montrer que $\forall x \in G$, $\exists\,(a, b) \in A \times B$, $x = ab$.

Exercice 8 (facile) : Soit E un ensemble. Montrer que $(P(E), \Delta, \cap)$ est un anneau (où $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$). Est-il intègre, commutatif, unitaire ?

Exercice 9 (moyen) : Déterminer tous les morphismes surjectifs de $(\mathbb{Z}, +)$ dans lui-même.

Exercice 10 (un peu technique) : Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, possédant un élément neutre à droite et telle que tout élément admet un inverse à droite. Montrer que G est un groupe.