Khôlles de Mathématiques - MPSI 3

Semaine 3 : Nombres complexes

Damien DESFONTAINES - `damien.desfontaines@ens.fr`

Cours 1 : Donner la définition de l'exponentielle complexe, montrer que $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective, et donner tous les antécédents d'un nombre complexe z.

Cours 1 (Logique) : Écrire les négations des propositions suivantes :

$$42 < x \leq y^2$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p_0 \in \mathbb{P},\ \forall p \in \mathbb{P},\ (p|n \Rightarrow p \leq p_0)$$

et décrire la proposition "p est premier" en langage formel, en n'utilisant que les symboles de base de l'arithmétique de Peano.

Cours 2 (Applications) : Donner la définition d'une application injective, surjective, bijective. Démontrer que si f est une fonction injective (resp. surjective) de E dans F et que E et F sont finis, $\mathrm{card}\,(E) \leq \mathrm{card}\,(F)$ (resp. $\mathrm{card}\,(E) \geq \mathrm{card}\,(F)$).

Cours 3 (Relations d'équivalence) : Soit f une application de E dans F. Montrer que la relation R définie par $xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ est une relation d'équivalence. Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ est définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = e^{\frac{i\pi n}{3}}$, combien y a-t-il de classes d'équivalences ?

Cours 4 (Relations d'ordre) : Soit E un ensemble. Montrer que la relation $\subseteq$ est une relation d'ordre sur $P(E)$. Est-ce un ordre total ? Un ordre bien fondé ? Admet-il un plus grand élément, un plus petit élément ?

Exercice 1 (facile, puis plus difficile) : Soient A et B deux ensembles. Trouver les implications entre les propositions suivantes :

$$A \subseteq B \quad \text{et} \quad P(A) \subseteq P(B)$$
$$A \in B \quad \text{et} \quad P(A) \in P(B)$$

Exercice 2 (facile, puis moyen) : Soient A et B deux ensembles. Trouver les inclusions entre les ensembles suivants :

$$P(A \cap B) \quad \text{et} \quad P(A) \cap P(B)$$
$$P(A \cup B) \quad \text{et} \quad P(A) \cup P(B)$$

Exercice 3 (facile) : On définit une relation $\preceq$ sur $\mathbb{R}^2$ de la façon suivante :

$$(x, y) \preceq (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x < x', \text{ ou bien} \\ x = x' \text{ et } y \leq y' \end{cases}$$

montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ? Toute partie de $\mathbb{R}^2$ admet-elle une borne supérieure par cette relation d'ordre ?

Exercice 4 (pas super fun) : Soit R la relation définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $xRy \Leftrightarrow xe^y = ye^x$. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence, et donner pour tout $x \in \mathbb{R}$ le cardinal de la classe d'équivalence de x.

Exercice 5 (moyen) : Soit E un ensemble fini, et $f : P(E) \to P(E)$ une fonction croissante pour l'inclusion. Commencer par donner la définition d'une fonction croissante pour l'inclusion, puis montrer que f admet un point fixe.

Indication : On pourra par exemple remarquer que $\varnothing \subset f(\varnothing)$ et essayer d'utiliser cette relation pour initialiser une récurrence.

Exercice 6 (astucieux) : Soit A un ensemble quelconque, et I un ensemble comportant au moins deux éléments. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de A dans I^A (ensemble des applications de A dans I).

Indication 1 : Procéder par l'absurde en supposant qu'une telle surjection φ existe, et créer une application $f \in I^A$ qui ne peut avoir d'antécédent par φ.

Indication 2 : L'argument à utiliser est "diagonal". Définir f de façon à ce que pour tout $a \in A$, l'image de a par f ne coïncide pas avec l'image de a par $\varphi(a)$.

Exercice 7 (difficile) : *Théorème de Cantor-Bernstein.* Soit E et F deux ensembles, f une injection de E dans F et g une injection de F dans E. On définit $A_0 = E \backslash g(F)$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = g(f(A_n))$, et on pose $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Soit $h : E \to F$ une application définie par :

$$h : x \to \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ y \text{ où } g(y) = x & \text{sinon} \end{cases}$$

montrer qu'une telle définition est correcte (h est bien définie, et de manière unique), et montrer que h est bijective. *Application* : Expliciter h si $E = F = \mathbb{N}$, $f : n \to n+1$ et $g : n \to n+2$.

Indication : Faire un dessin ! Et pour montrer la bijectivité de h, la méthode la plus simple est d'exhiber l'application réciproque.

Exercice 8 (rapide) : Soit R une relation symétrique et transitive. Que penser du raisonnement suivant :
- $xRy \Rightarrow yRx$ car R est symétrique
- $(xRy$ et $yRx) \Rightarrow xRx$ car R est transitive
- Donc R est réflexive...

Exercice 9 (plutôt astucieux) : Un ordre $<$ sur un ensemble A est dit bien fondé si toute partie non vide X de A admet un élément minimal (c'est à dire un élément $x_0 \in X$ tel que $\forall x \in X$, $x \not< x_0$). Soit A un ensemble quelconque. Montrer que A est fini si et seulement si l'ordre sur $P(A)$ donné par l'inclusion stricte $\subset$ est bien fondé.

Exercice 10 (moyen) : Un ordre $<$ sur un ensemble A est dit bien fondé si toute partie non vide X de A admet un élément minimal (c'est à dire un élément $x_0 \in X$ tel que $\forall x \in X$, $x \not< x_0$). Soit A en ensemble ordonné par un ordre partiel$<$. Montrer que $<$ est bien fondé si et seulement s'il n'existe pas de suite infiniment décroissante d'éléments de A.