Khôlles de Mathématiques - MPSI 3

Semaine 15 - Polynômes

Damien DESFONTAINES - `damien.desfontaines@ens.fr`

Cours 1 : Montrer que l'application $P \to \tilde{P}$ est un morphisme d'algèbre, donner une condition suffisante pour qu'elle soit injective.

Cours 2 : Caractéristion des racines multiples : énoncé, démonstration.

Cours 3 : Montrer que si $(a_1, ..., a_n)$ sont racines de P, alors $\prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$ divise P.

Cours 4 : Division euclidienne dans un anneau de polynômes : énoncé précis, démonstration.

Exercice 1 (pas trop difficile - X) : Soient a et b deux réels strictement positifs. Quels sont les entiers naturels n tels que $X^2 - \left(a^2 + b^2\right)$ divise $X^{2n} - (a^n + b^n)^2$?

(Indication : Réécrire la condition de divisibilité autrement pour avoir quelque chose d'utilisable. Une fois qu'on a fini avec les petites valeurs de n, on écrit $a + ib = \rho e^{i\theta}$, on divise par ρ^{2n} et on obtient un truc cool.)

Exercice 2 (moyen, puis difficile - ENS) : Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels qu'il existe p et q dans $\mathbb{N}^*$ tels que $(P')^p$ divise P^q. Même question dans $K[X]$, où K est un corps quelconque de caractéristique non nulle.

(Indication : la première question est facile, on écrit P comme le produit des $(X - z_i)^{\alpha_i}$, on le dérive, ça fait sortir un truc qui doit être de degré 1. Pour la deuxième question, tout est question de décomposition en facteurs irréductibles : on écrit $P = \prod_{i=1}^{k} P_i^{\alpha_i}$, $P' = n \prod_{i=1}^{k} P_i^{\beta_i}$, on trouve que $\beta_i = \alpha_i - 1$ en montrant quand $P_i^{\alpha_i - 1}$ divise P', mais pas $P_i^{\alpha_i}$ - et si on veut que la relation de divisibilité soit vérifiée, les facteurs irréductibles de P' sont les P_i. On regarde les degrés, et pouf on tombe sur le même résultat que dans $\mathbb{C}$.)

Exercice 3 (plutôt difficile - X) : Trouver tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X) = P(1 - X)$.

(Indication : On passe en complexe, si α est une racine de P différente de $\frac{1}{2}$ alors $(1 - \alpha)$ l'est aussi et P est divisible par $X^2 - X + \alpha(1 - \alpha)$. On itère le processus, et pour traiter le cas des racines valant $\frac{1}{2}$, on vérifie qu'il faut que le terme restant soit de degré pair, ce qui permet de conclure, en n'oubliant pas de revenir dans le monde réel.)

Exercice 4 (devrait être facile - ENS) : Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$.

Exercice 5 (pas super fun - X) : Soit $P = X^4 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que les racines de P forment un parallélogramme. Même question pour un rectangle.

(Indication : Youhou les polynômes symétriques élémentaires. Si les x_i sont les racines de P, elles forment un parallélogramme si et seulement si $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, quitte à en réarranger un peu. On a clairement $\sigma_1 = 0$, donc cette somme vaut 0. On calcule ensuite σ_3 pour trouver $b = -\sigma_3 = 0$, et dingue, c'est une condition suffisante (car alors $P = Q\left(X^2\right)$). Pour la suite, il faut que les modules soient égaux vu que le parallélogramme est centré en 0 : si ω est une racine carrée de $\Delta = a^2 - 4c$, c'est vérifié si $|-a - \omega| = |-a + \omega|$, équivalent à $a\overline{\omega} + \overline{a}\omega = 0$, et à $\overline{a^2}\Delta$ réel négatif : c'est réalisé si $a = 0$, sinon on réécrit ça $\left|a^2\right|\left(1 - \frac{4c}{a^2}\right)$ et pouf on a ce qu'on veut.)

Exercice 6 (facile, puis facile, puis difficile - ENS) : On souhaite d'écrire l'ensemble E des polynômes de $\{-1, 0, 1\}[X]$ scindés sur $\mathbb{R}$. Commencer par expliquer pourquoi il suffit de connaître les éléments de E unitaires qui ne s'annulent pas en 0. Puis, pour $(a_1, ..., a_n)$ des réels strictement positifs, montrer l'inégalité $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i}{a_j} \geq n^2$. Soit P un polynôme unitaire non constant de E tel que $P(0) \neq 0$. Montrer que $\deg(P) \leq 3$, en déduire E.

(Indication pour la dernière question : l'astuce est de réutiliser l'inégalité voulue en prenant les x_i^2 pour les a_i, où les x_i sont les racines de P. On réécrit ensuite ça avec les σ_i : $\sum_{i,j=1}^{n} \frac{x_i^2}{x_j^2} = \left(\sigma_1^2 - 2\sigma_2\right)\left(\left(\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}\right)^2 - 2\frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_n}\right)$)

Exercice 7 (moyen - X) : Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ n'admettant que des racines simples non nulles x_1, ... , x_n. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i P'(x_i)} = -\frac{1}{P(0)}$$

et calculer $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(x_i)}$.

(Indication : décomposer en éléments simples $\frac{1}{P(X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\prod_{i \neq k}(x_i - x_k)} \frac{1}{(X - x_i)}$, évaluer en 0. Puis, multiplier ça par X et faire tendre x vers $+\infty$.)

Exercice 8 (assez difficile - ENS) : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $\leq n$. Montrer que $P([[0,n]]) \subset \mathbb{Z} \Leftrightarrow P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Soit Q un polynôme réel à l variables tel que le degré de Q en chacune de ses variables est $\leq n$. Montrer que $P\left([[0,n]]^l\right) \subset \mathbb{Z} \Leftrightarrow P\left(\mathbb{Z}^l\right) \subset \mathbb{Z}$. Montrer enfin que pour tout $(m_1, ..., m_l) \in \mathbb{Z}^l$, $\prod_{k=1}^{l-1} k!$ divise $\prod_{1 \leq i < j \leq l}(m_j - m_i)$.

(Indication : La première question se fait par récurrence, en posant $Q = P(X+1) - P(X)$: Q est de degré inférieur et si .)

Exercice 9 (assez affreux - X) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_1, ..., z_n)$ les racines de $X^n + 1$. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, on a :

$$XP'(X) = \frac{n}{2}P(X) + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k - 1)^2}$$

et se servir de cette égalité pour montrer que pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à n, $\|P'\| \leq n\|P\|$, où $\|Q\| = \sup_{|z|=1}$