Khôlles de Mathématiques - MPSI 3

Semaine 14 : Espaces vectoriels de dimension finie

Damien DESFONTAINES - `damien.desfontaines@ens.fr`

Cours 1 : Montrer que de toute famille génératrice, on peut extraire une base.

Cours 2 : Théorème de la base incomplète : énoncé, démonstration.

Cours 3 : Théorème du rang : énoncé, démonstration.

Cours 4 : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. Démontrer que $\dim(F) + \dim(G) = \dim(F+G) - \dim(F \cap G)$.

Exercice 1 (plutôt facile, puis plus difficile - X) : Soient E et F deux espaces vectoriels non nuls de dimension finie, et $(f,g) \in (\mathcal{L}(E,F))^2$. Montrer que :

$$\mathrm{rg}(g) \leq \mathrm{rg}(f) \Leftrightarrow \exists h \in GL(F),\ \exists k \in \mathcal{L}(E),\ h \circ g = f \circ k$$

Exercice 2 (moyen - ENS) : Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et $k \in [[1, n-1]]$. Que peut-on dire d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ qui laisse stable tous les sous-espaces vectoriels de E de dimension k ?

Exercice 3 (moyen - ENS) : Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Montrer que $u^n = 0$. Soient maintenant $(u_1, ..., u_n) \in (\mathcal{L}(E))^n$ des endomorphismes de E tous nilpotents qui commutent deux à deux. Que vaut $u_1 \circ ... \circ u_n$?

(Indication : Si deux endomorphismes commutent, le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre...)

Exercice 4 (facile, puis difficile - X/ENS) : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $F = (e_1, ..., e_p)$ une famille positivement génératrice (c'est à dire que $\forall x \in E$, $\exists (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in (\mathbb{R}_*^+)^p$, $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$) de vecteurs de E.

1. Montrer que $n+1 \leq \mathrm{card}(F)$, et donner un exemple d'une famille positivement génératrice de cardinal $n+1$. En déduire que toute famille génératrice pour laquelle on a une relation de liaison à coefficients tous strictement positifs est positivement génératrice.
2. Montrer ensuite que si $p \geq 2n+1$, alors on peut trouver une sous-famille stricte de F qui soit toujours positivement génératrice. Donner un exemple d'une famille positivement génératrice de cardinal $2n$ qui soit minimale pour cette propriété.

(Indication : la première question est simple. Pour la seconde, soit I une base inclue dans la famille, et $J = [[1,p]] \backslash I$. Comme la famille est positivement génératrice, on a $\sum_{i=1}^p t_i x_i = 0$ où les t_i sont strictement positifs. On peut aussi écrire une relation de liaison $\sum_{i \in J} \lambda_i x_i = 0$, où les λ_i sont dans $\mathbb{R}$. Alors $\sum_{i \in I} t_i x_i + \sum_{j \in J} (t_j + x\lambda_j) x_j = 0$ pour tout x, on le choisit correctement, et pof on a une nouvelle relation de liaison à coefficients strictements positifs en virant un des x_j. Pour la dernière question, $(f_1, ..., f_n, -f_1, ..., -f_n)$, où $(f_1, ..., f_n)$ est une base, convient.)

Exercice 5 (difficile - ENS) : Soit K un corps infini, et E un K-espace vectoriel.

1. Montrer qu'il est impossible de trouver n sous-espaces vectoriels stricts V_1, ... , V_n de E vérifiant $V_1 \cup ... \cup V_n = E$. Cela reste-t-il vrai si K est fini ? Trouver un minimum pour n dans ce cas-là, montrer qu'il est atteint.
2. Soient $(F_1, ..., F_p)$ des sous-espaces vectoriels de E de même dimension $r < \dim(E)$. Montrer qu'il existe un supplémentaire commun à tous les F_i.

(Indication : On peut supposer n minimal, et trouver un $x \in V_n \setminus (V_1 \cup ... \cup V_{n-1})$ et un $y \in (V_1 \cup ... \cup V_{n-1}) \setminus V_n$ (pourquoi ?). Alors pour n'importe quel $\lambda \in K$, on peut dire quelque chose d'intéressant sur $y + \lambda x$. Pour la seconde question, prendre un sous-espace G de dimension maximale m tel que $F_i \cap G = \{0\}$ pour tout i. Si $r + m < n$, les sous-espaces $F_i \oplus G$ sont des sous-espaces stricts de E : d'après la question précédente, il existe un x qui n'est dans aucun de ceux-là, et on peut rajouter Kx à G, ce qui contredit la maximalité : $r + m = n$ et c'est fini.)

(Remarque : les élèves sont souvent tentés, pour la première question, de se base sur le fait que si $U \cup V = E$ où U et V sont deux espaces vectoriels, alors $U \subset V$ ou $V \subset U$. C'est vrai, mais on ne peut pas s'en servir pour faire une récurrence et répondre ainsi à la première question, précisément parce que l'union de plusieurs espaces vectoriels n'est pas un espace vectoriel.)

Exercice 6 (devrait être facile) : Trouver, pour tout $N \geq 3$, un exemple de N sous-espaces vectoriels $(E_i)_{i \in [[1,N]]}$ d'un même espace vectoriel qui soient en somme directe deux à deux, mais pas tous les E_i. Bonus : tels qu'en en prenant trois quelconques, on ne tombe jamais sur une somme directe. Superbonus : trouver l'exemple le plus simple que l'on puisse imaginer. Mégabonus : même chose en remplaçant 2 par n et 3 par $n+1$, pour $n \geq 2$.

Exercice 7 (facile) : Trouver un exemple d'une application linéaire injective d'un espace vectoriel dans lui-même qui ne soit pas surjective.

Exercice 8 (moyen - Centrale) : Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit f un endomorphisme de E. Calculer $\dim \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g = 0\}$.

(Indication : prendre une base gentille)

Exercice 9 (facile) : Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Existe-t-il un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E \times F)$ et $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(F)$?

Exercice 10 (moyen à difficile - X) : Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E annulé par un polynôme de degré 2 à racines simples : $(f - a\mathrm{Id})(f - b\mathrm{Id}) = 0$, où $a \neq b$.

1. Montrer qu'il existe λ et μ dans K tels que $\lambda(f - a\mathrm{Id})$ et $\mu(f - b\mathrm{Id})$ soient des projecteurs.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f - b\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - a\mathrm{Id})$.
3. Calculer f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Si $ab \neq 0$, montrer que $f \in GL(E)$, et calculer f^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(Indication : les première et deuxième questions sont faciles. Pour la troisième, écrire le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-a)(X-b)$ dans la base $((X-a), (X-b))$, et remplacer X successivement par a, b et f. Enfin, le fait que f soit dans $GL(E)$ est trivial en partant de la formule de l'énoncé, et si on pose $g = f^{-1}$, on a $\left(g - a^{-1}\mathrm{Id}\right)\left(g - b^{-1}\mathrm{Id}\right) = 0$, on fait repasser ça par la moulinette de la question précédente, on bidouille, on multiplie par f, et on trouve la même chose que précédemment. Ou alors, on peut y aller complètement au bluff, intuiter directement que c'est la même chose et vérifier :D)