Khôlles de Mathématiques - MPSI 3

Semaine 8 - Limites et continuité

Damien DESFONTAINES - `damien.desfontaines@ens.fr`

Cours 1 : Donner la définition d'une fonction lipschitzienne. Une fonction uniformément continue est-elle lipschitzienne ? L'inverse est-il vrai ? Démonstration.

Cours 2 : Théorème des valeurs intermédiaires : énoncé, démonstration.

Cours 3 : Théorème de Heine : énoncé, démonstration.

Cours 4 : L'image d'un segment par une application continue est un segment : énoncé, démonstration. Contre-exemple lorsque f n'est pas continue.

Exercice 1 (moyen) : Trouver un exemple d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue en 0 et seulement en 0.

Exercice 2 (amusant) : Soit (f_n) une suite de fonctions réelles dont l'image de n'importe quel segment est bornée. Montrer qu'il existe $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) = o(f(t))$ quand t tend vers $+\infty$.

Exercice 3 (facile, puis difficile) : La réciproque du théorème des valeurs intermédiaires est-elle vraie ? Montrer qu'elle est vraie si on suppose de plus f injective.

Exercice 4 (moyen) : Montrer qu'une suite de fonctions continues convergeant simplement sur $\mathbb{R}$ n'est pas forcément de limite continue. Montrer que c'est vrai si la suite de fonctions converge uniformément.

Exercice 5 (facile) : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue décroissante. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 6 (difficile - X MP 2010) : Soit f continue sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose pour tout $\delta \in \mathbb{R}_*^+$, $\omega(\delta) = \sup \left\{ |f(x) - f(y)| \mid (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| \leq \delta \right\}$. Montrer que $\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$, puis que ω est continue (on pourra admettre que la borne est atteinte).

Exercice 7 (difficile - ENS MP 2004) : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue telle que pour tout $x > 0$, la suite $(f(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente. Que peut-on dire de f ?

Exercice 8 (rigolo) : Soient $(f, g) \in \left([0,1]^{[0,1]}\right)^2$ continues vérifiant $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Exercice 9 (moyen) : Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ croissante. Montrer qu'elle admet un point fixe.

Exercice 10 (rigolo) : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |x - y| < |x - z| \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |f(x) - f(z)|$. Montrer (dans l'ordre) que f est injective, monotone, continue, affine.

Exercice 11 (owi une équation fonctionnelle) : Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x - y) f(x + y) = f^2(x) f^2(y)$

Exercice 12 : Trouver les points de continuité de la fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} \text{ si } x \in \mathbb{Q}, \text{ où } P = \min \left\{ q \in \mathbb{N}^* \mid \exists p \in \mathbb{Z},\ \frac{p}{q} = x \right\} \end{cases}$$