Khôlles de Mathématiques - MPSI 3

Semaine 3 : Nombres complexes

Damien DESFONTAINES - `damien.desfontaines@ens.fr`

Cours 1 : Donner la définition de l'exponentielle complexe, montrer que $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective, et donner tous les antécédents d'un nombre complexe $z = a + ib = \rho e^{i\theta}$.

Cours 2 : Inégalité triangulaire, énoncé et démonstration. Identité du parallélogramme.

Cours 3 : Forme trigonométrique de $e^{i\theta} + e^{i\varphi}$, interprétation géométrique.

Cours 4 : Expression de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en fonction de $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, énoncé et démonstration.

Exercice 1 (application directe) : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 3 + 4i = 0$.

Exercice 2 (application directe) : Linéariser $\cos^7(x)$.

Exercice 3 (application directe) : Soit $Z = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$. Donner une expression simple de Z^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 (calcul à peine astucieux) : Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $a+b+c = \pi$. Montrer que :

$$\cos^2(a) + \cos^2(b) + \cos^2(c) + 2\cos(a)\cos(b)\cos(c) = 1$$

Exercice 5 (calcul classique) : Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) \text{ et } S' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$$

Exercice 6 (calcul facile) : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - \overline{z} + 2 = 0$.

Exercice 7 (facile) : Tracer l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie $z + \overline{z} = |z|$.

Exercice 8 (moyen) : *Méthode de Cardan.* On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$, pour $(A, B, C, D) \in \mathbb{C}^4$.

1. Expliquer pourquoi il suffit de trouver une racine pour les trouver toutes.
2. Expliquer comment on peut se ramener à $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.
3. Trouver une translation permettant de se ramener à une équation de la forme $x^3 + px + q = 0$.
4. Résoudre l'équation en posant $x = u + v$ et $3uv = -p$.

Exercice 9 (difficile) : On cherche à montrer que tout polynôme P non constant à coefficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Par l'absurde, on va prendre P un tel polynôme et supposer que $P(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

1. On admet que la fonction $f : z \to |P(z)|$ atteint sa borne inférieure m (ce sera montré dans le cours de topologie, donc longtemps). Soit z_0 le point où cette borne est atteinte. Expliquer comment on peut se ramener à $z_0 = 0$.
2. Considérer alors $P(\epsilon c)$, pour ϵ très petit, et c bien choisi, et aboutir à une contradiction.

Exercice 10 (moyen) : Soit $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. On pose $\omega = \zeta^4 + \zeta$, calculer $\omega^2 + \omega$, en déduire la valeur de ω, calculer $\zeta^2 - \omega\zeta$, en déduire la valeur de ζ. Quelle est l'utilité de cet exercice ?